SONSUZLUKLUK NE KADAR BÜYÜKTÜR?

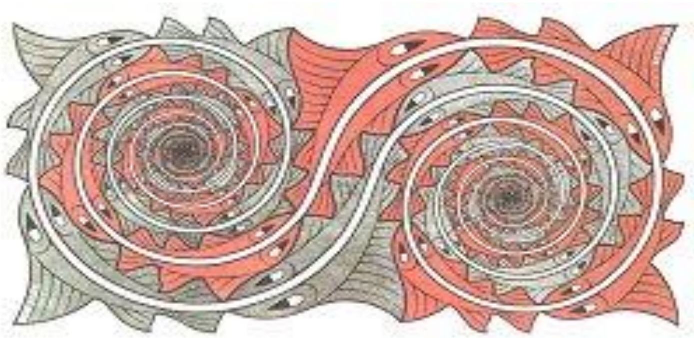
Cantor'den Gödel'e SÜREY VARSAYIMININ İZİNDE

Sevgi Çemberci

ÖZ

Matematiksel kesinlik anlamında 'sonsuzluk' macerası,1870' lerde Georg Cantor 'un küme kuramıyla başlar.Cantor, bu kuramdan yola çıkarak tek bir sonsuzluğun olmadığını,farklı boyutlarda başka sonsuzluklar olduğunu gösterir.Ardından sonsuzluk düzeyleri için sürey varsayımını ortaya atar.Bu varsayıma göre; doğal sayıların sonsuzluğu ile reel sayıların sonsuzluğu arasında başka bir sonsuzluk yoktur.Cantor, sezgisel olarak bunun doğru olduğuna inanır, ne var ki yıllar süren çabanın ardından bunu kanıtlayamaz. Hipotezin yanlış olduğuna inanan Kurt Gödel da bunu kanıtlayamaz.Ancak daha sonra o ve Paul Cohen ,bu hipotezi kanıtlamanın da yanlışlamanın da mümkün olmadığını gösterir.Gödel'in eksiklik teoremleri bağlamında 'Sürey Varsayımı 'nın vardığı sonuç; dildeki 'karar verilemezlik' durumunun matematik dünyasına taşınmasıdır.
Hilbert'in bir zamanlar metamatematiğinden yola çıkarak ,'bilmeliyiz,bileceğiz' ifadesi artık yerini,bilgide sınır görüşüne bırakmıştır.Bu bir anlamda,matematikte evrensel bilgi anlayışından kopuştur. Bir başka anlamda da ;bir şeyleri kendi içinde anlamanın,kendi evrenlerinde keşifler yapmanın özgürleştirici yanına işaret eder.

Anahtar Kelimeler: Süreklilik Hipotezi (Sürey Varsayımı), Küme, Kardinal, Karar Verilemezlik,Sonlu ötesi Sayılar.



GİRİŞ

'Sonsuzluk' gizem dolu bir kelime.Sonu gelmeyen zaman,sonsuz uzaylar, sonsuz yaşam arayışı..İlk çağlardan beri bu karmaşık fikirlerle uğraşıyoruz. Yaşamımız sonludur ama sonlu da olsa sonsuzluk hakkında düşünüyoruz. Ancak sonsuzluk,başka alanlar için erişilemez da olsa matematiğin koşulları farklıdır.Cantor'le birlikte, sonsuzluğun anlamı açılmış,başka sonsuzluklara gidilmiştir..Ancak bu da bazı devrimci düşünceler sonrasında gerçekleşeektir. Başlangıç itibariyle bizi sonsuzluk düşüncesine taşıyan sayı tasarımımızdır. Sonsuzluk nedir? deyince verilen tanım 'sınırsız bir niceliği ifade eder.' Bu tanım,' büyük,daha büyük' tanımımıza uyar.Çünkü 1,2,3..diye giden sayılar,sınırsız olarak bizi sonsuzluk düşüncesine taşır.Ardından sonsuzlık ile ilişkin küme kuramına dair çalışmalar,George Cantor (1845-1918) tarafından başlatılmıştır.Bu çalışmalarla birlikte matematik dünyası yeni bir yol ayrımına girecektir.

Araştırmamız; küme ve sonsuzlukla ile eşik konumundaki sürey varsayımı (continuum hypothesis) hakkındadır.Çalışmamızın kapsamı sürey varsayımının gelişimini ortaya koymak ve karar verilemezlik ile bilgide sınırın felsefi sonuçlarını irdelemektir.

Escher's work

Sürey Varsayımı İzinde ,

Hilbert'in Listesi

Matematiği canlı kılan bir yerde, çözülememiş harika sorulardır.İşte bu harika sorulardan birine, önce 1900 yazına,Paris Sorbonne'a gidelim.Burada tüm zamanların en büyük matematik kongrelerinden birisi düzenlenmiştir.Geleceği parlak,Alman matematikçi David Hilbert,elinde çözülmesi gerektiğine inandığı 23 soruluk liste, özellikle genç yeteneklere seslenmektedir.Tabi ki bu seslenişinin arkasında 'bilmeliyiz,bileceğiz' bakışı yatar.Ona göre,matematik çözülecek bu sorularla aksiyomatik hale getirelecek, varsa tüm paradokslarından kurtulacaktır. Sürey Varsayımı,işte bu çözülmesi gereken ilk problem olarak Hilbert'in listesinde tarihteki yerini alır.

Sürey Varsayımı,doğal sayıların sonsuzluğu ile reel sayıların sonsuzluğu arasında başka bir sonsuzluk bulunup buunmadığını sorar.

Gayet anlaşılabilir bir soru olarak gözükebilir ama 1870' lerde Cantor bunu ortaya attığında farklı sonsuzluklar arası düzen arayışındaydı. ve 'yoktur' inancıyla ortaya attığı bu problemi,kendisi de çözememişti.Cantor bu noktaya nasıl gelmişti?

Cantor ve Sonsuzluklar Diyarı

Sonsuzluk nedir? Cantor,1870'li yıllarda,o güne kadar hiçbir matematikçinin cesaret edemediği ,anlaşılmaz bulduğu bu kavramın, anlaşılabilir olduğunu göstermişti..Üstelik tek bir sonsuzluk değil,sonsuz sayıda pek çok sonsuzluk vardı.İşte ,onu bu sonsuzluklar dizisine götüren süreç,kendisinin de kurucusu olduğu küme kuramıdır.

Küme Kuramı

Sezgilerimizle bir kümenin bir şeyler topluluğu olduğunu söyleyebiliriz.

Örneğin,1'den 5'e kadar giden tam sayılar bir küme oluşturur.(1,2,3,4,5) olarak gösterilen bu küme sayılabilir,sonlu kümedir.Tam sayıların tamamı da bir küme oluşturur.Sonsuza kadar giden bu küme ise sayılabilir bir sonsuz kümedir.Bunun gibi başka kümeler de bulabiliriz.Çift sayılar,tek sayılar,asal sayılar her biri sayılabilir anlamda sonsuz kümelerdir.

Cantor, işte bu kümelerden bazılarını aldı ve bire-bir eşleştirme yoluyla onların eş güçte ya da aynı sayallıkta olduklarını gösterdi.

Örneğin,

1,2,3 ...diye başlayıp sonsuza kadar giden sayılar kümesi ve onun alt kümesi olarak 2,4,6...çift sayılardan oluşan sayılar kümesini ele alalım.

1, 2, 3, 4, 5, 6, …

2, 4, 6, 8, 10, 12, …

Şimdi sonsuza giden bu dizileri, 1 ve 2 , 2 ve 4 , 3 ve 6 şeklinde eşleştirirsek,sonsuza kadar giden bu iki dizinin eş güçte (eş sayallıkta) olacağını söyleyebiliriz.Yani onlar aynı boyutta sonsuzluklardır.Aynı şekilde;bu sayılar kümemizi,başka alt kümeleriyle de karşılaştırsak onlar da aynı boyutta sonsuzluklar olacaktır.Örneğin tek sayılar,asal sayılar hatta Galileo'nun bir zamanlar karşılaştırmış olduğu karesel sayılar.

Bu örnekler ilk bakışta paradoksal ifadeler gibidir.Örneğin,biri diğerinin yarısı gibi duran doğal sayılar ve çift doğal sayılar; nasıl oluyor da eş güçte olabilirler? Antik Yunanlıların 'bütün parçadan daha büyüktür' kavrayışı ile, sezgilerimiz adeta zorlanır.Ancak buradaki sorun, bu sayıların sonsuza kadar sayılabilmesi,yani sonlu gibi davranmasıdır..Hilbert'in 1924'te bir dersteyken anlattığı düşünce deneyi de sonsuz kümelerin işte bu sıra dışı davranışına örnektir.[1]

1 Hilbert bu varsayımı öğrencilerinr anlatmış, her hangi bir metninde yer vermemiştir.Varsayımın ünlü olmasına katkı yapan George Gamow'dur.

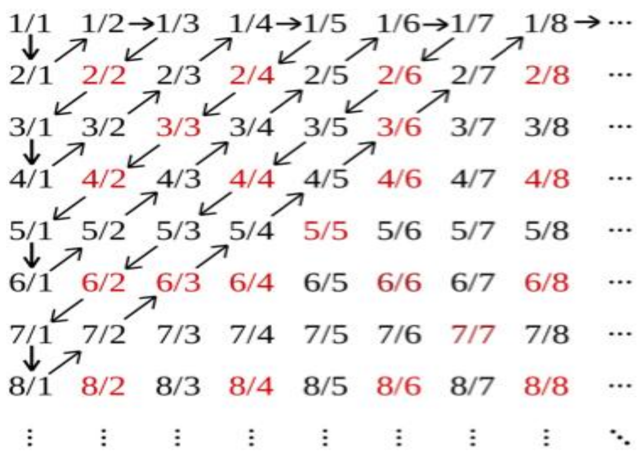
Hilbert'in Sonsuzluk Oteli

Hilbert, sonsuzluk oteli varsayımında, sonsuz sayıda odası bulunan bir otel tasarlar. Üstelik bu otelin tüm odaları doludur.Yani her n sayısı için n numaralı oda tutulmuştur. Ancak,geç saatte bir konuk gelir ve kendisi için boş bir oda ister.Hilbert ne yapacaktır? Bu konuğu ya geri gönderip otelimiz dolu diyecektir ya da fazladan bir oda bulmaya çalışacaktır.Oysa,otelin bir kuralı var.Ne olursa olsun konuğu geri göndermemektir. Hilbert,düşünür ve çözümü bulur.1 numaralı konuğuna 2 numaralı odaya geçmesini,2 numaralı olana 3 numaraya geçmesini,3 numaralı olana 4 numaralı odaya geçmesini..Böyle böyle konukların her biri,bir yanındaki odaya geçer.Yeni konuksa boş kalan bir numaralı odaya yerleştirilir.Problem çözülmüştür.

Gece,bitmemiştir.Çok daha ciddi bir şey olur.Bu kez sonsuz sayıda insan taşıyan bir otobüs gelir.Hilbert sukünetini bozmaz, buna da bir çözüm bulur.Konuklarına döner.Bu kez de her birinin çift numaralı odalara geçmesini ister.1 numaralı konuk 2 numaralı odaya,2 numaralı konuk 4 numaraya,3 numaralı ise 6 numaraya..Bu böyle devam eder.Sonunda bu yeni gelenler için de yer bulunmuştur..Her biri boş kalmış olan tek numaralı odalara yerleştirilir.Hilbert memnundur.

Çok geç bir vakit,bu kez de sonsuz sayıda insan dolu sonsuz sayıda otobüs gelir.Onlar için de yerler hazır olacaktır.Konuklar asal sayı numaralı odalara geçerler.Boşalan odalara da yeni gelenler..Aynı işlem daha daha büyük sonsuzlar için tekrarlanır durur. Hilbert odalarının sonu yoktur.

Şimdi de, rasyonel sayılara geçelim.Onlar da diğerleri gibi aynı sonsuzlukta mı?
 Cantor,bunun için rasyonel sayıların sayılabilir anlamında eksiksiz bir listesini göstererek onların da diğerleri gibi olduğunu gösterdi..
Bunun için,önce bütün rasyonel sayıları sonsuz bir sistemde toplayan bir matris tasarlayalım...



İlk sırayı payı 1 olan rasyonel sayılarla oluşturalım..İkinci sıra payı 2 olanlarla..Üçüncü sıra payı 3 olanlarla ..Bu böyle devam eder.Buradan,bütün rasyonel sayıların, sistemin bir yerinde bulunacağı anlaşılır.Örneğin 45/72 nerede mi?.45.. satır 72.. sütun.Şimdi bütün sayıları çaprazlama metoduyla birinden diğerine giden çizgi boyunca düşünerek liste haline getirelim..

1 , 2, 1/2, 1/3 , 2/2 , 3/1 , 4/1 , 3/2 , 2/3, 1/4 , 1/5 , 2/4 , 3/3....

1   2   3   4   5   6 . . .

Artık elimizde rasyonel sayıların da eksiksiz bir listesi vardır.Bunu 1'den başlayan N doğal sayılarıyla denkleştirdiğimizi düşünelim.Demek ki öncekiler gibi bu küme de sayılabilir sonsuzluklara karşılık gelir.Bu da onları sonsuzluğun aynı çeşidinden yapar.

Cantor için şimdi sırada reel sayılar vardır. Ve çalışmaları sonucunda gördü ki,reel sayıların sonsuzluğu diğerlerinden daha büyüktü. Bunu,bütün reel sayıları listelemeye çalıştığında listede eksik olan bir ondalık sayıyı göstererek kanıtlamıştı.

Peki,bu nasıl olabildi?

Bunun için,önce 0 la 1 arasındaki reel sayıların bir listeye yazılabildiğini varsayalım. Eğer böyle bir liste yapılabilirse, listenin ilk sırasındaki reel sayı ilk doğal sayıya (1’e), ikinci reel sayı (2'ye) ve sırasıyla tüm reel sayılar doğal sayılara birebir eşlenebilir. Dolayısıyla, böyle bir liste yapılabilirse doğalsayılar kümesi ile reel sayılar kümesi eş sayılı, yani eş güçte olacaktır..

Örneğin sayılarımız şunlar olsun:

1) 0,14957.......

^

2) 0,25376.......

^

3) 0,00243.......

^

4) 0,18229.......

^

C= 0,.........

Şimdi 0 la 1 arasında öyle bir reel sayı kurgulayacağız ki bu sayının bu listede yer alması mümkün olmasın. Bu sayıya C adını vereceğiz.Ardından, bu sayının virgülden sonra gelen rakamlarını,yukarıda verilen sayıların basamaklarına bakarak yazalım.

Yani,C sayısının virgülden sonraki ilk basamağını 1'den farklı, 2. basamağını 5'ten farklı, 3. basamağını 2'den farklı, 4. basamağını gene 2'den farklı birer rakam olarak seçelim.

İşte, bu noktada fark ederiz ki, C 'nin kendisi bir reel sayı olduğu halde bu listede yer alan her sayıdan en az bir ondalık basamakta (sayı listemizde kaçıncı sırada yer alıyorsa o basamakta) farklı olacağıdır..Buradan da C sayımızın listenin herhangi bir yerinde yer alamayacağı anlaşılır. Demek ki varsaydığımız birebir eşleme mümkün değil.

Kaçınılmaz sonuç şudur ki R reel sayılarının eksiksiz bir listesi olamaz!..

Buradan da reel sayıların sonsuzluğunun,diğerlerinden, daha büyük olduğu sonucuna ulaşılır.

Başından beri ne yapıldı?

1'den başlayan doğal sayıların,bu kümeyi kapsayan rasyonel sayılarla eş güçte olduğu gösterildi.Ancak irrasyonyel sayıları rasyonellere ekler ve ardından reel sayılar kümesine varırsak,sonuçta gördüğümüz ise reel sayıların daha üst mertebede bir sonsuzluk aldığı oldu..
Bu devrimci bir düşünceydi.Cantor için,artık bir sonsuzluk değil iki sonsuzluk vardı.Birden sonsuzluk kavramı büyümüştü.Acaba daha daha büyük sonsuzluklar da olabilir miydi? Tabi ki Cantor için,bu beklenmedik anların devamı gelecekti.

Başka büyük sonsuzluklar ve Sürey Varsayımı

Cantor,farklı sonsuzluk düzeyleriyle karşılaşmıştı.Şimdi bunları birbirinden ayırmak gerekecekti.Ve her biri için verilecek bir kardinal sayıdan yararlandı.Bir kümenin kardinalliği,kümenin genişliğidir.Örneğin (a,b,c) kümesinin kardinal sayısı 3' tür.

Peki,ya sonsuz kümeler?

Cantor N doğal sayıların kardinal sayısını İbrani alfabesinin ilk harfi $\aleph_0$ (alef sıfır) olarak belirledi.R sayısının kardinal sayısının da 'continuum'dan hareketle **c** ile ifade etti. Buradan,N' in sonsuzluğu R nin sonsuzluğundan daha geri bir sonsuzluk olduğuna göre $\aleph_0 < \mathbf{C}$ yazabilirdi.

$\aleph_0$ ve **C** arasına başka kardinal bir sayı gelebilir mi? Sıradan eşitsizlikler vardır.Herhangi iki kesir arasında başka kesirler olduğu gösterilebilir 1< 2 gibi tam sayı eşitsizliklerini alırsak eğer,araya başka bir tam sayı sıkıştıralamaz.

Cantor, $\aleph_0$ ve **C** arasında başka kardinalitede bir sonsuzluk var mı diye sormuştu ve 'yoktur' varsayımından hareket etti.Ancak bu soru kendisini açmaza soktu.(sürey varssayımı) [1]

[1]Cantor, küme kuramında, sonradan başka matematikçilerin göstereceği gibi bazı açmazların farkındaydı..Örneğin: Tüm kümelerin kümesine B diyelim. B' nin tüm alt kümelerinden oluşan kümeye de A diyelim. Biliyoruz ki: A kümesi B kümesini kapsıyor.Ancak B, tanım gereği tüm kümeleri kapsıyor olmalıydı..Bu bir çelişki!.. Bu açmaz, Cantor'un çalışmalarına dair bazı ipuçları da verir..Ontolojik olarak farklı iki tür sonsuzluk nasıl olabilir?. Farklı 2'ler var olamıyorsa.. Dahası bu sonsuzluk türleri birbirlerinden türetilemiyordu. Reel sayıların sayılamayan sonsuzluğunun, sayılabilir sonsuzluğa sahip doğal sayılardan türetilememesi gibi.

Cantor,ardından sonsuzun niteliği ile ilgili başka keşiflerde de bulundu.Bunların en meşhuru sonlu ötesi kardinal sayıların yaratılmasıdır.Cantor, $\aleph_0$ ' den başlayarak daha üst mertebede sonsuz bir küme kurdu.N 'den başlayarak N 'in alt kümelerini kapsayan N_1 kümesini kurdu ve bu kümenin kardinal sayısını $\aleph_1$ ile gösterdi.Bu inşanın N_1 üzerinden tekrarlanması sonucu N_2 ortaya çıkar.Onun kardinal sayısı da $\aleph_2$ dir. Böylece bu işlem defalarca tekrarlanarak daha üst mertebede daha büyük alefler dizisini üretti.

$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots$

Artık şimdi sonsuzlukları sayabilirdik.Bir kapı açılmıştı ve matematik farklı bir yere doğru uzanıyordu.

'Sonsuzluk korkusu, gerçek sonsuz en yüksek biçimiyle bizi yaratmış ve ayakta tutuyorsa da,ikincil sonlu ötesi biçimlerinde bütün çevremizde yer alsa da,hatta zihinlerimizi işgal etse de onu görme olasılığını mahveden bir tür miyopluktur.'

George Cantor

Ancak diğer matematikçiler Cantor'un yarattığı sonsuzluklar yüzünden sıkıntı yaşıyordu. Çünkü sonsuzluk, kesinliği bilinen diğer sayılara göre muğlak bir alandı.Kimilerine göre ise ancak Tanrının ellerinde olabilirdi.[1]

Leopold Kronocker onu şarlatanlıkla suçladı ve onun makalelerinin yayınlanmasına karşı çıktı.

Henri Poincaré onun için 'Şu Cantor'un fikirleri matematiğin yakasına yapışmış kötü bir hastalık. Ve matematik bir gün onu da tedavi edecektir.' dedi.

Cantor daha sonra, dostu Dedekind'e yazdığı bir mektupta,

'Bunu bulduğumu asla iddia etmemeliydim.Benim zarif kanıtım işte bu yıkıntıların altında yatıyor.' diye yazacaktı.Oysa tarih onun haklılığını ortaya çıkardı.İnsanlık onun kapısını açtığı sonsuzluğu, Hilbert'in şu sözleriyle hatırlayacaktı:

'Hiç kimse Cantor'un yarattığı cenetten bizi kovamayacaktır.'

[1]Cantor da sonsuzlukla ilgili çalışmaları bir tür metafizik tavırla gerçekleştirir.Ancak matematiksel sonsuzluğu ele alışı yalnızca matematiğin sınırlarındadır..

Bilmeliyiz,Bileceğiz

Cantor'un Küme Kuramı matematik dünyasında kendini yavaş yavaş kabul ettirse de bunun bir diyeti vardı.Bazı tanımlamalar yüzünden ortaya paradokslar çıkmaya başlamıştı.. Örneğin,Frege'nin küme kuramında Russell'ın bir paradoks bulması ve bunu tipler kuramıyla çözmesi ancak kendisinin de başka bazı paradokslarla karşı karşıya kalması.Hilbert, bunların artık olmaması anlamında “meta-matematik” programını başlatttı.

Yani,matematik içerikten arındırılmış bir şekilde tamamen biçimselleştirelecek, aksiyomatik hale getirilecekti..Matematik dil evrensel bir dildi ve öyle de kalmalıydı.

8 eylül 1930'da bir radyo röportajında,bu dilin matematiğin bütün doğrularının kilidini açmak için yeterince güçlü olduğunu anlatıyordu.Röportajda 23 problemin hepsinin yakında çözüleceğini, matematiğin sarsılmaz ve mantıksal temeller üzerine kurulacağından şüphesinin olmadığını söylemişti.Antik Yunandan matematikçiler tarafından söylene gelmiş olan çözülemeyecek soru yoktur dedi ve olayı şu cümleleri ilan ederek bitirdi.

'Bilmeliyiz,bileceğiz.'

Oysa beklenmedik bir şey oldu.

Hilbert'in şansına başka bir matematikçi, onun düşlerini yıkacak ve matematiğin   kalbine belirsizliği yerleştirecekti..Belirsizliği yıkan matematikçi, Avusturyalı Kurt Gödel'di.

Gödel'in sürey varsayımına götüren süreç,gençken katıldığı 'Viyana Çevresi' toplantılarında başlar.Buradaki ünlü felsefe ve bilim insanlarıyla girdiği tartışmalardan yararlanan Gödel,gelecekte devrim yaratacak bir düşünceye adım adım yaklaşacaktı. Hilbert'in listesindeki 2. soru,onun matematik dünyası için önemli bir basamaktır. O da ,Hilbert gibi bu soruyu çözmek ve matematiğe mantıksal bir temel hazırlamak istiyordu.Ama bulduğu şey onun bile şaşırmasına neden oldu.Matematiksel mantık üzerine yaptığı tüm çalışmaları Hilbert'in istediklerini kanıtlamanın tersine bir sonuçtu.Adı...Eksiklik Teoremi..

Gödel'in Teoremi

Gödel;Bertrand Russell ve Alfred North Whitehead' ın birlikte ele aldıkları Principia Mathematica' ve Peano sistemi üzerinde çalışıyordu.Ve çalışmaları sonunda gördü ki; matematiğin herhangi bir mantıksal sisteminde,sayılar hakkında doğru olan ama kanıtlanması imkansız ifadeler vardı.

Raporuna *'bu açıklama doğru olamaz'* ifadesiyle başlamıştı.

Henüz bir matematiksel ifade değil. Sonra da, asal sayılar üzerine inşa edilmiş bir kodla Gödel bu ifadeyi saf bir matematiksel ifadeye dönüştürdü..Şimdi bu ifade, doğru ya da yanlış olmak zorundadır.Eğer bu ifade yanlışsa ,bu aynı ifadenin doğrulabildiğinin kanıtlanabileceğini gösteriyordu.Yani ifade doğru olurdu ve bu da ortaya bir çelişki çıkarıyor.Yani bu ifade doğru anlamına geliyor Diğer bir deyişle işte size doğru gelen ama kanıtlanması imkansız matematiksel bir ifade.

Godelîn kanıtı matematik dünyasını krize soktu.Ya üzerinde çalıştıkları problem mesela Goldbach Varsayımı ya sa Riemann Hipotezi de böyle bir şeyse?

New Jersey kıyısından genç bir matematikçi Paul Cohen, Gödelîn uğraştığı şeylerle ilgileniyordu.Ancak gerçekten izini bırakabileceği bir matematik alanı bulmakta zorluk çekiyordu..Ta ki Cantor'un Sürey Varsayımı hakkında bir şeyler okuyana kadar.Cohen,daha 22 yaşında bu soruyu çözebileceğine karar verdi.Ve bir yıl sonra iki cevabın doğru olabileceğin ile dair ilginç bir keşifle ortaya çıktı.Sürey varsayımının doğru varsayılabileceği matematiksel bilgi vardı.Tam sayılar ve reel sayılar arasında başka bir sonsuzluk yoktu.Ama eşit derecede doğru olan başka bilgide de sürey varsayımının yanlış varsayılabileceği idi. Cohen'in kanıtı doğru gözüküyordu ama yöntemi o kadar yeniydi ki kimse bunun tamamen doğru olabileceğinden emin olamıyordu..Güvenilecek tek kişi vardı..O da Gödel'di.Ve Gödel, çalışmayı inceledi .Bu ispat,doğru dedi ve çalışmasını onayladı.

Tüm bu sonuçlar Gödel'i ,matematikten felsefeye taşıdı.

Gödel'in Matematik Felsefesi

Gödel'in, önce 1947 yılında,Cohen sonrası önemli bazı eklemelerle 1964 yılında yayınladığı 'Cantor'un Süreklilik Hipotezi Nedir?' adlı makalesini yayınladı.
Gödel, bu makalesinde hipotez için üç olasılık bulunduğunu belirtir:
Hipotez;doğrulanabilir, çürütülebilir ya da karar-verilemezdir. Gödel' e göre sürey varsayımı, matematiksel olarak karar-verilemezdir.Daha açık bir şekilde,Cantor'un ortaya attığı sürey varsayımı, bildiğimiz küme kuramının aksiyomları ile ne yanlışlanabilir ne de doğrulanabilirdir. Açıkçası , sürey varsayımı, küme kuramının aksiyomlarından bağımsızdır.
Bunun Gödel için felsefi sonuçlarına gelince,Sürey Varsayımının, karar verilemez olması, sorunun 'anlamsız' olduğu anlamına mı gelir? Gödel için bu sorunun yanıtı; anlamını yitirme eldeki aksiyomatik sisteme göre olsa da başka oluşturulabilecek bir aksiyomatik sisteme göre bu hipotez çürütülebilir,olur.Ve devam eder.Diyelim ki bu hipotezin bir anlamı olduğunu kabul ettik. Yeni bir aksiyomatik sistemi nasıl bulacağız ve daha önemlisi bulduğumuz sistemin aradığımız "o" sistem olduğundan nasıl emin olacağız.?
Gödel'in burada da yanıtı aksiyomların üzerinde çalışarak, sonuçlardaki, özellikle de' doğrulanabilir' sonuçlardaki işlevselliğe bakarak olacaktır.
Gödel'in bu açıklamalarının arkasında,onun Platonculuğu yatar.. Platonculara göre,matematik nesneleri zaman ve mekandan yani fizik dünyadan bağımsız nesnelerdir.
Gödel aynı makalesinde devam eder.
'Yine de duyu tecrübelerimizden uzaklıklarına rağmen aksiyomların kendilerini bize doğru gibi kabul ettirmeleri olgusunda görüldüğü üzere, küme kuramının nesnelerinin bir algısına benzeyen bir şeye de sahibiz. Bu tür bir algıya yani matematiksel sezgiye duyu algısından daha az güvenmemiz için bir neden göremiyorum. Fiziksel kuramlar oluşturmamızı sağlayan duyu algıları, gelecekteki duyu algılarının bu kuramlarla uyumlu olmasını beklememize neden olur dahası şu an için kararsız olan bir sorunun bir anlamı olduğuna ve gelecekte kararverilebileceğine inanmamızı sağlar. Matematikteki küme-kuramsal paradokslar, fizikteki duyu yanılgılarından daha çok sıkıntılı değildirler. Cantor'un süreklilik hipotezi türü problemlerin bir çözümüne yol açacak, yeni matematiksel sezgilerin tamamen mümkün olduğu daha önce belirtilmiştir. '
Eksiklik teoremlerinin sonucu olarak karşımıza çıkan;formel aksiyomatik sistem [1] matematiksel doğruluğu garantileyen bir yöntemdir fakat, ispatın değil.[1]

[1]Burada anlatılmak istenen,Gödel'in Hilbert'in doğruluk kavramı yerine ispat kavramını ele alması ve bu kavram değişikliğinin bir 'eksikliğe ' işaret etmesidir.Bu eksikliğin,Bertrand Russell ve Alfred North Whitehead' ın birlikte ele aldıkları Principia Mathematica' da üst yapısal olaral eklenmiş Peano aksiyom sistemi hakkında olduğunu tekrar hatırlatmak gerekir.

Hilbert'in programı

Hilbert'in,başlattığı metamatematik programına göre amaç, 'anlamlarından soyutlanmış matematik sembolleri birbirine bağlayan bağların tutarlı ve çelişkisiz' olduğunu göstermekti.Böylece,meta-matematik, matematik konularının değil, matematiğin kendisinin incelenmesi olacaktı.Tutarlı olduğu kadar tamlığını da göstermeliydi.

Bu,bir anlamda bütün matematik teoremlerinin kanıtlarını bir bilgisayar yardımıyla elde etmeye benziyordu. Matematik sezgiyi dışarda bırakma pahasına.Ancak bu nasıl mümkün olabilirdi?

Örneğin bir dilde,gramerin temelini oluşturmak için hem sözcüklerin anlamına (anlambilim), hem de gramer kurallarına (sözdizimi) gerek vardır.Oysa dilbilimciler,gramer kurallarının temellerini oluşturmak isterken, sözcüklerin anlamını dışlasalardı kendilerini bir paradoks içinde bulurlardı.

Bundan kurtulmak için önce birkaç sözcüğün anlamını ve ' belli' bazı gramer kurallarını önceden kabul etmelidir. Hilbert de bunu yaptı.Bu işe gerçek matematik dediği az sayıda kuralla başladı.

Oysa Gödel'in Eksiklik teoremlerine göre,az sayıda aksiyomla yola çıkıp bütün matematiği icat etmek mümkün değildi[1] Bu şöyle de ifade edilebilir.

“*Bir dilin tam tanımı, aynı dilde yapılamaz; çünkü bu yolla bir cümlenin doğruluğu tanımlanamaz”.*

Tıpkı Escher tarafından çizilen ünlü Çizen El gravürü gibi. Bu gravür “kendini kaynak gösterme” (otoreferans) çelişkisini ifade eder. B eli, A elini çiziyorsa, A eli B elini çizemezdi.

[1]Sonlu sayıda aksiyomla başladığımızı düşünelim.Gödel bu noktada bu aksiyomları kullanarak yazabileceğimiz her anlamlı cümleye karşı bir sayı dizisi kurdu.Daha sonra ispatlanabilecek bir cümleye karşılık gelen sayı dizisinin özel bir biçim göstermesi gerektiğini buldu.Bu şu demek.Bazı anlamlı cümleler yazabiliriz ama sistem içinde ispatlamayız.Daha açık bir deyişle bu varsayım kabul edilmiş aksiyomatik sistemden bağımsızdır.Yani bu sisteme kendisini ya da değilini ekleyin bu sistem yine tutarlıdır.Oysa bir sistemin tutarlı olması demek kendisi varsa değilinin olmaması demektir.

Sürey Varsayımının Yankıları

Sürey varsayımının karar verilemez durumuna karşılık gelmesi,az sayıda da olsa tepkilere yol açar.. Örneğin,Wittgenstein ,sonluötesi küme kuramının gülünç olduğunu ileri sürer.Brouwer, sonsuzlukların büyük olması durumunu anlamsız olarak niteler. Kimileri açısından da karar verilemezliğin, küme ve nesnenin yeniden kuruluşu açısından olanak olduğudur ve sonsuzluk düşüncesinin yapısının yeniden anlaşılmasına ihtiyaç vardır.
Kimi entellektüel çevrelerce de toplumsal ve siyasi alana taşınarak varsayımın, istismar edildiği öne sürülür.[1]
Kimisi için de bu sonuçlar,Fregede sonra tekrar Kant'a gönderme yapar. Zira Kant'a göre, insan aklı kendi kavramlarını doğayla birlikte inşa eder.Bilginin kesinliği bize bağlıydı,doğruluk ise deneyimin zorunlu kılar.Yani sadece mantık yetmezdi.
Ancak öte yandan Kant'a ters düşen bir durum da,sonsuzluğun edimsel kullanılımıdır..Zira sonsuzca büyüğü saymak sonsuz büyüklükteki zamanı gerektirir. Sezgiciler için ise,zihin baştan sona sayıları oluşturucu olarak bilebilmek zorundadır.Oysa Cantor'un reel sayıların büyüklüğü ile ilgili ispatı bu anlamda ispat değildir.Ve tek tek rakamların üzerinden geçmek için sonsuz adım gerekir.

Sona yaklaşırken,
Sürey varsayımın izlediği yol,matematiğin icat mı keşif mi açısından bakıldığı ile de ilişkin durur. Eğer keşif olarak yaklaşılırsa,örneğin Frege açısından,aritmetik mantığa indirgenebilirdi.Ancak Frege'den sonra, Russell ve Whitehead'in da devam ettirdiği indirgeme işinin, Gödel ile birlikte olamayacağı ortaya çıktı.
Zira, bu yüzyılın başında relativite ve farklı geometrilerin ortaya çıkmasıyla tüm bakışlar olgulara çevrilmişti..Platoncuların asırlarca izini sürdükleri,zaman ve mekansız dolaşan matematik nesneler,artık fizik dünyamızdan seslenebilirdi.Bu sesleniş, evrene ilişkin bilinemezlik,yanılabilirlik gibi zihin yapılarımızdan ayrı düşünülemezdi..Matematik bir dildi,bir düşünceydi..Adeta yaşayan bir organizma gibi,teoremler de oluşturur,ispatlanamayan yapılar da..
Bu yüzyılın ortalarında,kesinliğin peşinden koşmanın yanıltıcı olduğu anlaşılmıştı. Ancak bu diğer bakımdan matematikçileri,yeni keşif alanları yaratmakta özgürleştirdi.Ve her zaman herşey başladığı gibiydi. Sonsuzluk odalarının sonu yoktu.

[1]Alan Sokal,Jean Bricmont;Son Moda Saçmalar,sayfa 203-208

SONSÖZ

Sonsuzluk ne kadar büyüktür?

Sonsuzluğun niteliğini,ne kadar büyük olduğunu merak ederek başlamıştık.
Cantor,bu kavrama matematiksel kesinlik veren ilk matematikçiydi..

Sonsuzluk onunla tanım buldu.Birlikte onunla sonsuzluklar ülkesine gittik...
Doğal sayılardan çok daha kalabalık başka sonsuzluklar gördük.Hilbert Oteli'nin sonsuz odalarından sonsuz kere daha fazla. Onlardan da daha büyük başka sonsuzluklar..
Sonsuzluklar arası bir sonsuzluk aradık sonra.Bir bulduk bir kaybettik. Sanki bizden habersiz öylece dolaşan bir sonsuzluk!.

Bulmalıydık oysa ..Yoksa bulunamaz mıydı?.Hakikat neredeydi?
Öylece bıraktık orda..
Belki,kendi başına uyruk sonsuzluklar olabilirdi.Ya da bulabilmemizde bir sınır.
Belki de bu sınır, kendi sonsuzluklarımıza uzanan bir yoldu.

Hakikat neredeydi? Hakikat güzel olandaydı belki..Güzelliği yaratan iç karmaşamızda..
Tıpkı bir zamanlar bir şairin söylediği gibi..

Güzellik hakikattir,hakikat de güzellik,hepsi bu.
Dünyada bildiğimiz tek şey budur,bilmemiz gereken de..

KAYNAKLAR

Douglas R. Hofstadter ; Gödel,Escher,Bach :Bir Ebedi Gökçe Belik,2011,İstanbul,Pinhan

Gödel;'Cantor'un Süreklilik Problemi Nedir?,2011,Bekir S.Gür,Matematik Felsefesi içinde,185-187

Ernest Nagel,James R. Newman ; Gödel Kanıtlaması,2007,İstanbul,Boğaziçi. Ün.

Philip E. B. Jourdain, New York: Dover Publications, 1915.

David Hilbert,Sonsuz Üzerine ,Bekir S.Gür, Maematik Felsefesi içinde,113

Bertrand Russell,Matematiksel Mantığın Felsefi Önemi ,Bekir S.Gür, Matematik Felsefesi içinde,101

Lakatos;Proofs and Refutations;1976,Cambrige Üniversitesi

Carl b. Boyer ; MatematiğinTarihi,2015,Doruk

Çitil, Ahmet Ayhan; *Matematik ve Metafizik*, İstanbul:Alfa, 2012.

Nesin, Ali; *Sezgisel Kümeler Kuramı.* İstanbul: Nesin Matematik Köyü, 2013.

Nesin, Ali; *Aksiyomatik Kümeler Kuramı.* http://www.acikders.org.tr/pluginfile.php/572/mod_resource/content/0/hafta_15.pdf,

Stephen F. Barker ,Matematik Felsefesi,2003,İmge

Bekir Gür ; 'Matematik Belası' Üzerine ,2012,Nesin Matematik Köyü

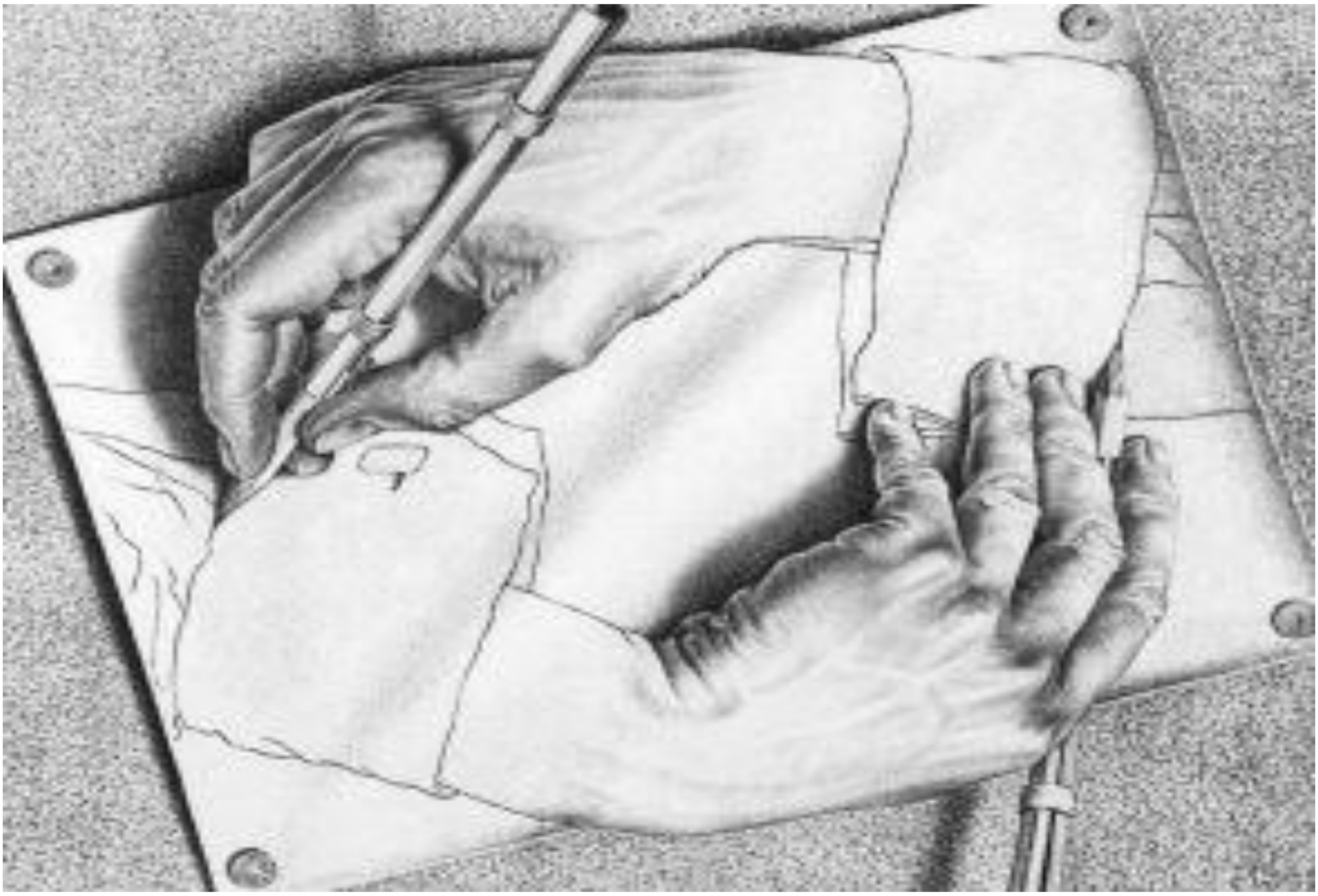
Alain Badıou;Sonlu ve Sonsuz ,2013,Monokl Yayınları

Bekir S Gür; Matematik Felsefesi,2011,Kadim yayınları

George Lakoff-Mark Johnson;Metaforlar ,Hayat;Anlam ve Dil,2005,Paradigma

Eugenia Cheng; İnfinity Beyond,2017

Alan Sokal,Jean Brichmon;Son Moda Saçmalar,Postmodern Aydınların Bilimi İstismar Etmesi,2011,Alfa



Escher's Work